

BEGRIJPEN, REDENEREN, BEWIJZEN

[Menno van Steenis]

Tijdens een gesprek met enkele (oud)collega's over de toen voor het vwo vrij recent ingevoerde Euclidische vlakke meetkunde merkte iemand op: 'De leerlingen weten niet eens wat bewijzen is.' Daarop liet ik mij ontvallen: 'Eigenlijk weet ik het ook niet.' Even viel er een stilte, verbeeldde ik mij.

Overzicht van dit artikel

Dit artikel gaat over synthese en analyse, en in het bijzonder het tot elkaar brengen van synthese en analyse.

Omdat synthese moeilijk te hanteren is stellen we eerst enkele vragen.

- Is er wiskunde mogelijk zonder overbrenging?
- Wat is de kern van het overbrengen van wiskunde?
- Wat bedoel je met: ik wil een bewijs begrijpen?
- Wat is de samenhang tussen synthese en analyse?
- Is een bewijs altijd noodzakelijk of volstaat begrip en omgekeerd?
- Bestaat er redeneren zonder bewijs en redeneren zonder begrip?

Het is beslist niet de bedoeling antwoorden op deze vragen te geven; ze dienen alleen als aanzet tot overdenken.

Omdat het overbrengen van wiskunde vaak noodgedwongen een meer analytisch karakter heeft, zal dit artikel meer op synthese zijn gericht, waardoor het artikel (nog) meer het karakter van een aanzet krijgt.

Eerst probeer ik de woorden

- begrijpen
- redeneren
- bewijzen

beter te doorzien door ze in samenhang te zien met andere woorden, te beginnen met *samenhang* en *geheel*.

Om deze woorden beter te begrijpen zijn er weer woorden nodig. De steeds groeiende woordenhoeveelheid vormt een onaf maar

samenhangend 'netwerk' van woorden, dat de woorden *beter* doet *begrijpen* en verduidelijkt. Dit netwerk vormt een onaf geheel, immers voor ieder woord wat ik (beter) wil begrijpen, heb ik woorden nodig en om die weer te begrijpen weer (nieuwe) woorden, enzovoort. *Tegelijkertijd* met het construeren van een samenhangend netwerk van woorden geef ik voorbeelden uit de wiskunde. Deze wiskundige voorbeelden vormen de kern van het artikel. De voorbeelden komen meestal uit wat vaak 'elementaire' meetkunde wordt genoemd. Met deze (kleine) voorbeelden probeer ik aan te geven wat ik versta onder de woorden *samenhang*, *geheel*, *beter*, en *begrijpen* in de wiskunde. Op dezelfde wijze als met de groeiende hoeveelheid samenhangende woorden, kan ik een onaf netwerk opbouwen van samenhangen in de wiskunde op een manier zoals aangegeven is in de voorbeelden. Uiteindelijk ontstaat er op die manier wiskunde als een onaf netwerk.

De woorden *begrijpen*, *samenhang*, *synthese*, *analyse*, *redeneren* en *bewijzen* vormen een leidraad voor de onderstaande beschouwing.

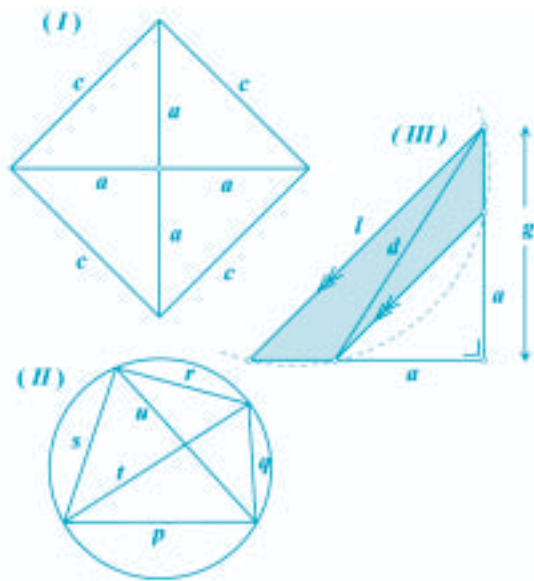
Onderwijl komt ter sprake dat wiskunde altijd reële wiskunde is. Daarna besteed ik aandacht aan de didactiek van de wiskunde en geef ik aanwijzingen dat *de didactiek van de wiskunde de wiskunde zelf is*.

Begrijpen, synthese, analyse

Van de woorden naar de wiskunde.

Hoe meer samenhang ik zie, hoe beter ik wiskunde begrijp.

Ik teken een cirkel met een koordenvierhoek en zijn diagonalen: zie ik ook *samenhang* in deze figuur? Vervolgens teken ik een driehoek met een rechte hoek. Zie ik ook samenhang tussen beide tekeningen, die ieder op zich zijn voorzien van een samenhang? Kan ik de twee *gehelen* tot één *geheel* maken?



FIGUUR 1

Voorbeeld 1a. Een *samenhang* tussen de stelling van Ptolemaeus en de stelling van Pythagoras.

Zie figuur 1.

(I) Bijzonder geval van de stelling van Pythagoras: de oppervlakte van het vierkant is $4 \times \left(\frac{1}{2}a^2\right) = c^2$ of $c = a\sqrt{2}$.

(II) Stelling van Ptolemaeus in een koordenvierhoek: $pr + qs = tu$

(III) De lijnstukken z c z l vormen een gelijkbenig trapezium (en dat is een koordenvierhoek). Ik weet dan (volgens de stelling van Ptolemaeus):

$$d^2 = (g - a)(g - a) + cl$$

of

$$d^2 = g^2 + a^2 - 2ag + cl$$

Conclusie: $c = a\sqrt{2}$ geeft ook $l = g\sqrt{2}$, en dan blijkt dat $cl = 2ag$.

En uit (III) vinden we dan: $d^2 = g^2 + a^2$.

Merk op: uit een bijzonder geval van Pythagoras komt het algemene.

Voorbeeld 1b. Niet alleen is het mogelijk *uit* het bijzondere het algemene te krijgen, maar vind je in dit geval ook al *met behulp van* de tekening een bewijs. De tekening bevat of (eigenlijk) is de *samenhang*.

Zie figuur 2.

Laat nu de natuurlijke *samenhang* spreken door alleen de figuur van het bijzondere geval aan de figuur van het algemene geval te koppelen.

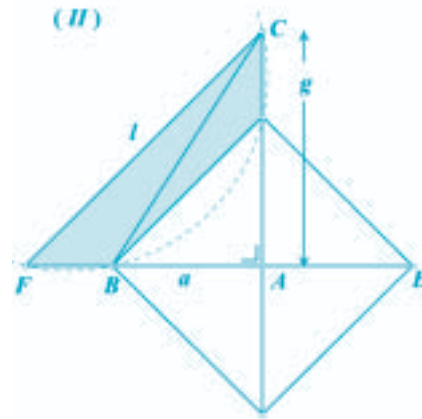
Op dezelfde manier als in voorbeeld 1a bij (III) vinden we:

$$(I) d^2 = g^2 + a^2 - 2ag + cl$$

(II) Nu is $BDE \sim ACF$ (hh), zodat $BE : BD = AF : AC$ of $2a : c = l : g$, waaruit we vinden: $cl = 2ag$.

En natuurlijk dezelfde conclusie: $d^2 = g^2 + a^2$.

De voorbeelden 1a en 1b blijken dicht bij elkaar te liggen, als je naar het resultaat kijkt. Maar wat betreft *samenhang* en *gehelen* geeft voorbeeld 1b een vergezicht.



FIGUUR 2

De voorbeelden 2 en 3 gaan over *gehelen* en *geheelvorming* naar aanleiding van [7].

Voorbeeld 2. Afgeknotten kegel - B en G zijn de oppervlaktes van het boven- en grondvlak van de afgeknotten kegel. Hierbij: $\sqrt{B} + \sqrt{G}$ wordt een *geheel*. Ik wil laten zien dat de formule voor de inhoud van een afgeknotten kegel op een tweede manier kan worden geschreven.

Zie figuur 3.

Toon aan dat (met $h = h_1 - h_2$):

$$h(B + G + \sqrt{BG}) = h_1G - h_2B \text{ (de factor } \frac{1}{3} \text{ is weggelaten)}$$

We werken toe naar de *gehelen*:

$$h_1B + h_1G + h_1\sqrt{BG} - h_2B - h_2G - h_2\sqrt{BG} \stackrel{?}{=} h_1G - h_2B$$

$$\text{of } h_1B + h_1\sqrt{BG} \stackrel{?}{=} h_2G + h_2\sqrt{BG} \text{ of}$$

$$h_1\sqrt{B} \cdot (\sqrt{B} + \sqrt{G}) \stackrel{?}{=} h_2\sqrt{G} \cdot (\sqrt{G} + \sqrt{B})$$

$$\text{of, met } \sqrt{B} + \sqrt{G} \text{ als een geheel: } h_1\sqrt{B} \stackrel{?}{=} h_2\sqrt{G}, \text{ zodat}$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{B}}$$

en dit laatste is waar!

Merk op dat de distributieve eigenschap een fundamentele *samenhang* geeft tussen optellen en vermenigvuldigen, wat kan leiden tot *geheelvorming*: $5 \text{ appels} + 2 \text{ appels} = (5 + 2) \text{ appels}$

Voorbeeld 3. Afgeknotten kegel - Een afbeelding is de vorming van een *geheel*.

Zie weer figuur 3.

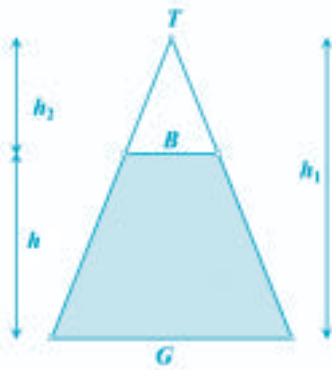
Het getal k is de vermenigvuldigingsfactor die de kleine kegel afbeeldt op de grote kegel.

Dus $kh_2 = h_1$ (en genoteerd als afbeelding: $k(h_2) = h_1$) en $G = k^2B$.

En dan bekijken we (weer na vermenigvuldiging met 3):

$$(h_1 - h_2)(B + G + \sqrt{BG}) \stackrel{?}{=} h_1G - h_2B$$

Via de vermenigvuldiging met k :



FIGUUR 3

$$(kh_2 - h_2)(B + k^2B + \sqrt{k^2B^2})^2 = kh_2 \cdot k^2B - h_2B$$

En, na deling door B en door h_2 :

$$(k-1)(k^2 + k + 1) = k^3 - 1$$

En dit laatste klopt!

Samenhang zien en gehelen maken vormen het wezen van synthese.

Voorbeeld 4. Dit voorbeeld gaat over het doen overgaan, door draaiingen, van een vierkant in een gelijkbenige driehoek (zie daarvoor ook [6]).

Zie figuur 4a op pag. 222.

Ga uit van het vierkant $ABCD$. M en N zijn de middens van opvolgend AD en BC . V is een variabel punt op het lijnstuk AB . Maak MT evenwijdig aan VN . Dan is $VN = MT = MS$.

Door S te schuiven over VN naar N kunnen we uit de figuur zien dat $\text{Opp}(MST) = \text{Opp}(MNT)$.

Door T naar C te schuiven over DC kunnen we zien dat $\text{Opp}(MNT) = \text{Opp}(MNC) = \frac{1}{2} \cdot \text{Opp}(MNCD)$.

Dus $\text{Opp}(MST) = \frac{1}{2} \cdot \text{Opp}(MNCD) = \frac{1}{4} \cdot \text{Opp}(ABCD)$.

Vermenigvuldig nu driehoek STM t.o.v. S met 2 tot SS_2S_3 (figuur 4a). Dan heeft de ontstane driehoek dus dezelfde oppervlakte als $ABCD$.

En in figuur 4b is dan te zien hoe vierkant $ABCD$ na de aangegeven spiegelingen de driehoek SS_2S_3 volledig bedekt.

Je ziet in dit voorbeeld duidelijk het verschil tussen (synthetische) meetkunde en analytische meetkunde.

De (over)oneindige getallen zijn verdwenen, lijnen zijn geen getallenlijnen, maar gehelen: de analyse breekt de gehelen in stukken.

Bewijzen (en redeneren)

We hebben nu de woorden *begrijpen*, *synthese* en *analyse* aan bod laten komen.

Nu het woord *bewijzen*. Bij *bewijzen* gaat het om communicatie. Als ik iets wil bewijzen, wil ik iemand

anders iets duidelijk maken; ik wil iemand anders doen *begrijpen* wat ik zelf heb *begrepen*. Hiervoor gebruik ik communicatiemiddelen en terwijl ik die gebruik, vraag ik steeds: begrijp je het nu? Je zou dus bijna kunnen zeggen dat er zonder communicatie geen wiskunde is. De traditie wil dat ik als communicatiemiddel het *redeneren* gebruik, waarbij ik 'waarheden' aan elkaar probeer te rijgen. Het snoer wat zo geregen wordt moet een duidelijk begin en eind hebben. Soms heb je geen ander begin dan de aanschouwing en moet je letterlijk zeggen: 'Zie je wel?' Dit is bijvoorbeeld het geval met een begin dat bestaat uit lijnen en punten. Wat zijn eigenlijk lijnen en punten? Een antwoord op deze vraag kan niet gegeven worden met behulp van de analytische meetkunde, want dan stuit je op de oneindigheidskwesties van de overoneindige reële getallen. Ook als je vraagt: 'Wat zijn natuurlijke getallen?', moet je eigenlijk antwoorden met een plaatje: 'Zie je wel!'

Hilbert gebruikt dan aantallen streepjes (zie [4, p. 69]).

In dit verband gebruikt hij het woord *fysisch*.

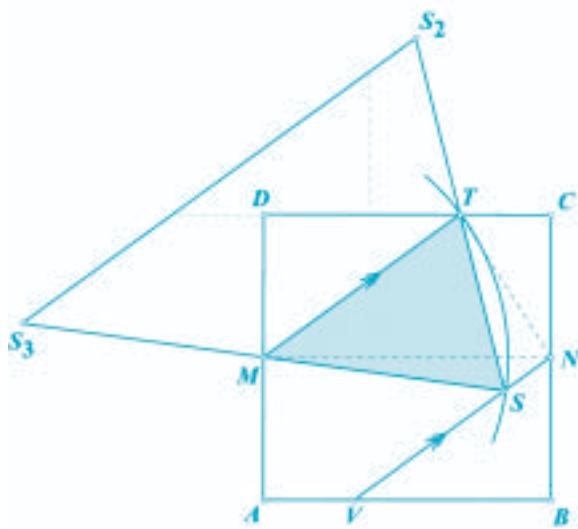
Wanneer we bewijzen als een redenering met een begin en een eind zien, dan moeten we oppassen daarmee het niet-lineaire van de wiskunde uit het oog te verliezen. Bovendien loert dan het gevaar dat je de wiskunde als *geheel* een begin en een eind toe wilt kennen.

Die streepjes haal je, net als Hilbert, hoe dan ook uit de realiteit. Maar in dat geval is alle wiskunde reële wiskunde.

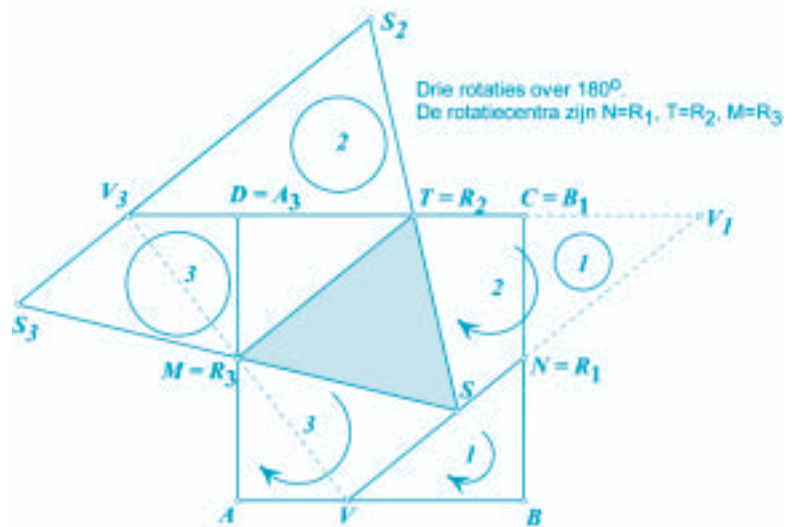
Zowel Brouwer als Kant proberen beiden de reële wereld in het brein te trekken.

Brouwer begint met de eenheid, dan kan hij maken de twee-eenheid, de drie-eenheid, enzovoort; dat noemt hij het continuüm. Deze twee vormen de oerintuïtie van het discrete en het vloeiende; hij brengt hiermee de kenbare wereld als het ware binnen de hersenen.

Je zou het ook anders kunnen zeggen: ik begin met iets, een geheel. Is er ook samenhang met een tweede



FIGUUR 4a



FIGUUR 4b

ding? Zo ja, dan vorm ik samen een nieuw geheel, enzovoorts. De meest uiteenlopende dingen, ook wiskundige, kunnen verborgen zitten in deze gehelen. Het vloeiende beschouw ik vooralsnog als een geheel, bijvoorbeeld als een lijn.

De gemaakte steeds *groeïende* gehelen nopen tot een onzekerheid bij de waarheidsvraag: waar, niet waar of ik weet het (nog) niet. Dit komt dus uit het onaf blijven van de steeds gevormde gehelen.

De wiskunde beschouw ik niet als een vooraf gegeven geheel, maar als een steeds groeiend geheel van samenhangen. Bovendien denk ik dat je kunt beginnen waar je wilt.

Brouwer gaat nu de twee delen van de oerintuïtie combineren, een continuüm construeren, de reële getallen tevoorschijn laten komen. De moeilijkheid zit natuurlijk in de genoemde onzekerheid, als je het heel simpel zegt: hoe kun je met punten zonder afmeting een lijn vullen. Dit lost Brouwer op ingenieuze, wiskundige manier op.

We zien dus dat de oerintuïtie van de groeiende gehelen (de natuurlijke getallen en de lijnen) het idee van de synthese weergeven, er vormt zich steeds iets nieuws, terwijl het construeren van de reële getallen het analyseren van het geheel voorstelt. Kant zegt het in [5] (een versimpeling gebruikend) zó: Als je beweert over een bol: 'De bol is rond', dan is dat een *analytisch* oordeel. Daarentegen, 'die bol is rood' is een *synthetisch* oordeel. Hiermee voeg je iets nieuws aan de bol toe. Geen verwarring mag ontstaan met het woord 'analyse' in bovenstaande zin en de analyse als onderdeel van de wiskunde, want natuurlijk is de wiskunde in het algemeen afhankelijk van het zien van samenhangen. Opmerking: het ene onderdeel van de wiskunde is waarschijnlijk rijker aan samenhangen dan het andere. Zie bijvoorbeeld de analyse (rijker) en de getaltheorie. Beschouw nu het aantal wortels van een vergelijking met reële coëfficiënten: er bestaat samenhang tussen de voorkomende reële getallen en de aantallen

wortels die mogelijk zijn. Weet je iets over de (reële) coëfficiënten, dan weet je iets over natuurlijke getallen.

De bovenstaande twee gehelen van Brouwer (dus: het groeiend geheel van natuurlijke getallen en het groeiend geheel van lijnen) bepalen nu juist de synthetische onderdelen van de wiskunde: enerzijds de meetkunde, anderzijds de getaltheorie, met daartussen (of beter: daaromheen) de algebra. Het zijn ook juist de gebieden uit de begintijd van de wiskunde. Sporen van de analyse waren er al bij Eudoxos met zijn reële getallen. Een analytische opzet vind je bij Euclides, en bij Archimedes in bijvoorbeeld zijn bepaling van de oppervlakten van parabolstukken. Bij de analytische meetkunde van Descartes en bij de infinitesimaalrekening van Newton en Leibniz. En deze analyse heeft de ontwikkeling mogelijk gemaakt van onze greep op de ons omringende zintuiglijk waarneembare realiteit: de techniek.

Dus als we de synthese vanuit de analyse bekijken is het 'geheelvorming', en als we de analyse vanuit de synthese bekijken is het 'in stukken splitsen'. Anders gezegd: het lineaire tegenover het niet-lineaire, resultaat tegenover samenhang.

Didactiek

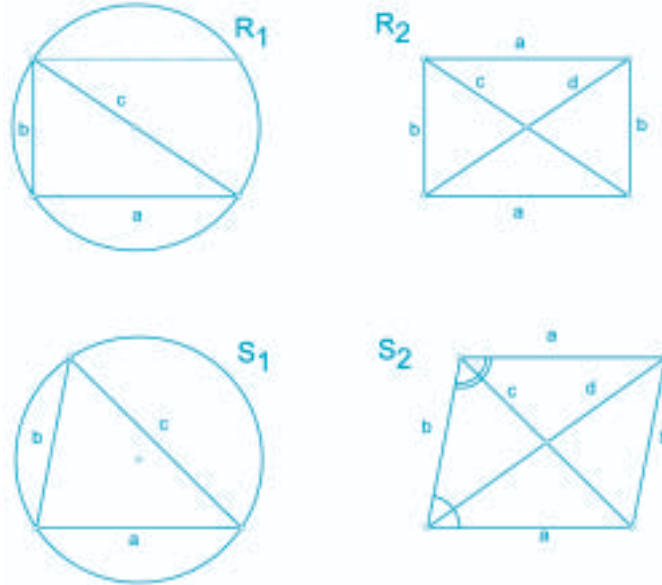
De didactiek van de wiskunde is de wiskunde zelf.

Allereerst citeer ik Derksen en De Laive (zie [2], een boek voor onderwijzers):

'Over het oplossen van meetkundige vraagstukken... Er zijn drie soorten van bewijzen in de Meetkunde. Een bewijs kan zijn:

- a. *indirect*
- b. *synthetisch*
- c. *analytisch.*

De synthetische methode gaat rechtstreeks op haar doel af, en wel door het trekken van hulplijnen, of door het toepassen van bekende eigenschappen, waarvan de



FIGUUR 5

genoemde een noodzakelijk gevolg is. Deze methode eist een grote mate van geoefendheid, en is bij vraagstukken die niet veel overeenkomst vertonen met reeds bekende, in de meeste gevallen niet te gebruiken.

De analytische methode kent deze bezwaren niet en is daarom het meest aan te bevelen. Zij bestaat hierin, dat men, na een nauwkeurige tekening te hebben gemaakt van de figuur waarvan men een eigenschap bewijzen wil, deze figuur goed onder de ogen ziet; niet uit het oog verliest, wat men bewijzen moet; voet voor voet de kwestie terugbrengt, door gebruikmaking van bekende eigenschappen, tot een andere die men als waar erkent en die omgekeerd de gestelde eigenschap wederkerig tot gevolg moet hebben. [Dit zet men als proces door] tot men gekomen is op een eigenschap, die men als waar erkent en waaruit de waarheden van de vorige eigenschappen, zijnde wederkerig, moeten voortvloeien. Deze methode eist meer meetkundig denken en verstandig overleg; zij verdient daarom eerder aanbeveling dan de synthetische. De laatste heeft altijd iets kunstmatigs. Toch, hoe eenvoudig de analytische methode ook schijnt, men moet over een groot aantal eigenschappen die veelvuldig voorkomen kunnen beschikken.'

De bedoeling is dat alle opmerkingen over didactiek (of: overbrenging van gedachtegoed) in de voorbeelden en beschouwingen van dit artikel zijn terug te vinden. Eerst enkele woorden over het citaat van Derksen en De Laive.

Inhoudelijk komt het kernpunt duidelijk naar voren. Men gaat uit van een analytische opzet, namelijk het oplossen van een meetkundig vraagstuk, en misschien daardoor is er nauwelijks uitleg van de synthetische methode. Het woord 'oplossen' heeft al min of meer een analytische achtergrond, omdat er een begin en een eind wordt gesuggereerd. Het is alsof van tevoren de keus al vast staat: is de druk van de eeuwenoude opbouw, die van Euclides, te groot? Het lijkt of dit nog

steeds zo is. We praten nog steeds over meetkunde in de zin van Euclides.

Voorbeeld 5. *Samenhang* van driehoek en vierhoek; 'recht en scheef.'

Zie figuur 5.

R_1 en R_2 zijn 'recht', S_1 en S_2 zijn 'scheef'. R_2 is een rechthoek en S_2 een parallellogram.

In R_1 geldt $a^2 + b^2 = c^2$, in S_1 niet. In R_2 geldt dat $2a^2 + 2b^2$ gelijk is aan de som van de kwadraten van de diagonalen (*), maar dit klopt ook in de scheve vierhoek S_2 . Het is in te zien door twee keer de cosinusregel toe te passen.

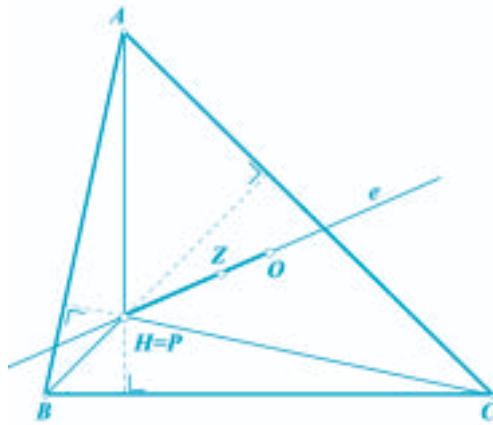
Je zou kunnen zeggen: het parallellogram heeft meer *samenhang* dan de driehoek.

Met een kleine omzetting van (*) krijg je de zwaartelijnsstelling, dat wil zeggen de lengte van de zwaartelijn in een driehoek, uitgedrukt in de zijden van die driehoek.

Vroeger zei men: heb je een vraagstuk over de zwaartelijn, verleng die met zichzelf; maak van de driehoek een vierhoek (uitspraak a). En ook: heb je een vraagstuk over een trapezium, maak een driehoek door de opstaande zijden te verlengen (uitspraak b).

Doordat men op resultaat werkte keek men (toen) niet verder. Maar voortbouwend op uitspraak a: er zijn natuurlijk veel bijzondere vierhoeken, waarvan je de samenhang kunt gebruiken voor een driehoek (zie voorbeeld 1 hierboven). En op uitspraak b: ook van een driehoek zijn veel bijzonderheden bekend die je bij een vierhoek kan gebruiken.

Ik doe de schrijvers van het bovenstaande citaat overigens tekort als ik niet vermeld dat zij beginnen met enkele '*grote voorbeelden*': voorbeelden die aanleiding kunnen geven tot het *zien* van veel *samenhang*, met de nadruk op *kunnen*. Helaas volstaan de schrijvers alleen met bewijzen. Je zou kunnen zeggen: de grote voorbeelden kunnen dienen als



FIGUUR 6

voorbeelden van ‘gehelen vormen’; ze zien echter geen *samenhang*(!) met synthese.

Bekijk voorbeelden van tevoren niet vanzelfsprekend als vraagstukken die je wilt (of moet) bewijzen, maar ga eerst vooral na of je ook samenhangen ziet. Dit bedoel ik met een andere manier van kijken.

Let ook op de gegeven voorbeelden, waarbij samenhang van een bijzonderheid iets algemeen maakt.

Het eerste ‘grote voorbeeld’ (uit Derksen en De Laive), ook genoemd in [3, p. 47] luidt:

In driehoek ABC is Z het zwaartepunt en P een willekeurig punt; de zijden van de driehoek zijn a, b, c. Nu geldt:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PZ^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Als een bijzonder geval van dit voorbeeld volgt hieruit de afstand tussen het hoogtepunt H en het middelpunt O van de omcirkel (op de Euler-lijn e van de driehoek); zie figuur 6 (andere bijzondere keuzes van het punt P leveren andere onverwachte samenhangen).

Bovendien is er ook samenhang in de tekening(!) (groot voorbeeld 2; zie figuur 7) van een driehoek ABC met z’n Fermat-punt F (te construeren via gelijkzijdige driehoeken op de zijden van de driehoek)^[1]. Die figuur is op zich uit te breiden tot zeer veel samenhangen waarvan ik sommige wel en vele (nog) niet kan bewijzen. Tenslotte is er de samenhang met de stelling van Ptolemaeus (groot voorbeeld 3) die weer een bron is van vele ongekende samenhangen (zie weer voorbeeld 1 hierboven). ‘Ptolemaeus’ sluit dan weer aan op de prominente rol van de cirkel.

Je moet natuurlijk die samenhangen wel zien; maar steeds geldt: samenhangen zien, doet samenhangen zien.

Consequenties voor wiskundeonderwijs

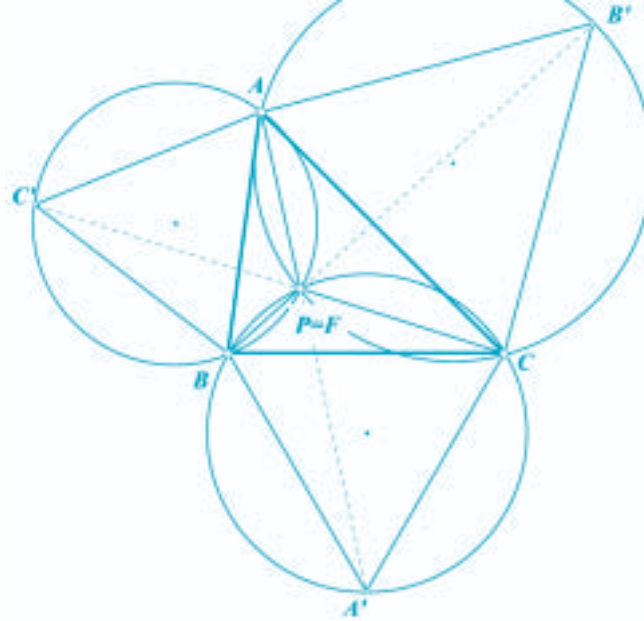
Behandel een synthetische discipline ook zoveel mogelijk synthetisch. Vooral de meetkunde (hier de elementaire) is een goede mogelijkheid om te laten zien wat samenhangen zijn omdat de mogelijkheid

bestaat dat je zonder redeneren letterlijk de samenhang kunt zien, simpel gezegd je *ziet* het goede ‘hulplijntje’. Ik denk dat je door de nadruk te leggen op het zoeken naar mogelijke samenhangen, langzamerhand de samenhangen in een gegeven tekening makkelijker ‘vanzelf’ kunt zien, maar het is vanzelfsprekend dat ook redeneren samenhangen kan oproepen. Zoals ik in het overzicht al heb aangegeven valt de nadruk op de synthese, want dan kan men pas met recht proberen, redeneren en samenhangen zien bij elkaar te brengen. Je zou kunnen denken aan: als de samenhangen ‘dicht tegen elkaar aanliggen’ dan gaat het op redeneren lijken. Het gaat dus niet zozeer om een tegenstelling maken tussen redeneren en samenhangen zien, maar om het fixeren (op een bewijs, op resultaat van opgave). Dit neemt niet weg dat ik het *expliciete* gebruik van meetkunde om te leren redeneren niet juist kan vinden. Maar vooral baart mij zorgen de discrepantie tussen de (inhoudelijke) moeite die wordt besteed aan het meetkundeonderwijs en wat er uiteindelijk op de examens tevoorschijn komt, liever gezegd kan komen. Ik denk dat de meetkunde, zeker zoals ik het zie, uiteindelijk naar het schoolonderzoek verschoven moet worden en ook de manier van het afnemen van dit schoolonderzoek anders zal moeten, mogelijk zelfs in groepjes en met een lange tijdsduur.

Het gaat erom de meetkunde echt op een andere manier te *zien* (bijna letterlijk). De figuur (de tekening, het plaatje) *bevat*, zelfs *is* de samenhang.

Didactisch zou je van alle *samenhangen* die je *ziet* plaatjes kunnen maken. Met kleuren, met herkenbare symbolen en wat je maar kan verzinnen, zodat je de samenhang kunt *zien* en hoe ingewikkelder de samenhang is, hoe meer plaatjes. Ik heb in dit verband wel eens gedacht aan een computersysteem met meerdere beeldschermen.

Voor het vinden van nieuwe samenhangen is het van het grootste belang om zoveel mogelijk samenhangen



FIGUUR 7

tussen twee objecten te zoeken. Uiteindelijk gaat het er om: *begrijp* ik een bepaalde samenhang *beter*? Het is duidelijk dat hoe meer samenhangen ik zie, hoe beter dit 'proces van begripsontwikkeling bij de leerling' zich ontwikkelt. De moeilijkheid zit natuurlijk in *een* start van dit proces; ik denk dat een programma als *Cabri Geometry* hier bijna noodzakelijk is. Uiteraard kun je met Cabri hele mooie schetsen maken, maar het gaat er ook om 'zomaar' naar verbanden te zoeken en deze verbanden met het programma, als het kan, te laten controleren, in het begin met hulp van de docent. Door de strakke opbouw van de meetkunde in vraagstukken en stellingen zijn bijna alle te behandelen vraagstukken al bekend. Wat nog erger is: ieder gebruikte steeds dezelfde oplossingen. Het gevolg is erg weinig nieuwe samenhangen in de leerboeken te vinden zijn: men schreef gewoon steeds van elkaar over, met bewijs en al (zie weer [3, p. 47]). Het lijkt er echter op dat er met het meetkundedeel van *Moderne wiskunde* (zie [8]) wel een kentering naar meer *samenhang* is ingezet. Het is dan bijna onmogelijk tot goed *begrijpen* te doen komen. Uit eigen ervaring weet ik hoe moeilijk het is echt te *begrijpen*, wat een vraagstuk (*samenhang*) inhoudt: de moeilijkheden te *zien* als je zelf niet op zoek gaat naar onverwachte samenhangen. Dit is mogelijk een gevolg van de analytische aanpak, die op resultaat gericht is: een andere kijk op de meetkunde is absoluut noodzakelijk. Het centraal schriftelijk examen, dat binnen een beperkte tijd wordt afgenomen, speelt hierin uiteraard ook een grote rol: vanwege de tijdbeperving wordt alleen maar de analytische aanpak genomen.

Tot slot

Dat het bewijs door redeneren als resultaat tevoorschijn moet komen en niet hoe men eraan gekomen is, blokkeert bijna natuurlijkerwijze het vinden van nieuwe *samenhangen* en dus het *beter* begrijpen. Niet voor niets is een gangbare uitspraak bij

een (analytisch) bewijs: ik heb het bewijs voor me, nu moet ik het nog begrijpen. Gevraagd aan de leerlingen, dan zeggen zij onmiddellijk: 'Wiskunde moet je *begrijpen*.' Dit is waarschijnlijk de reden waarom zij met zoveel plezier aan meetkunde werken: zij kunnen daar zelf op zoek gaan naar *samenhangen*.

Noot (red.)

[i] Voor het Fermat-punt van een driehoek geldt dat som van de afstanden van dat punt tot de hoekpunten minimaal is.

Referenties

- [1] Dirk van Dalen: *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2001).
- [2] H.A. Derksen, G.L.N.H de Laive: *Leerboek der vlakke meetkunde, vierde deel*. Zutphen: W.J. Thieme en Cie (1913).
- [3] A.J. Goddijn: Een kast vol voorwoorden. In: *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs* 21(1) (2001); pp. 45-50.
- [4] Leon Horsten: *Eindig, Oneindig, meer dan Oneindig*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (2004).
- [5] Immanuel Kant: *Kritik der reinen Vernunft* (1781). Nederlandse editie: *Kritiek van de zuivere rede*. Amsterdam: Boom (2004).
- [6] Rob van Oord: *Van vierkant naar gelijkzijdige driehoek*. In: *Euclides* 80(7) (2005); pp. 380-381, 386.
- [7] Ab van der Roest: *Een bijzonder gemiddelde*. In: *Euclides* 80(7) (2005); pp. 284-285.
- [8] A. van Streun e.a.: *Moderne wiskunde, B2 deel 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff (1999).

Over de auteur

Menno van Steenis (1933) studeerde in 1958 af in de wiskunde. Hij was daarna tot 1995 actief als docent wiskunde in het Voortgezet Onderwijs en als begeleider van beginnende wiskundeleraren. Hij is altijd bezig geweest met de vlakke meetkunde en met wiskundige structuren in het algemeen.

E-mailadres: m.van.steenis@wolmail.nl